



Die Wasserrakete

Gliederung:

1. Einleitung

- 1.1. Bauanleitung einer einfachen Wasserrakete**
- 1.2. Inbetriebnahme**

2. Warum fliegt die Wasserrakete

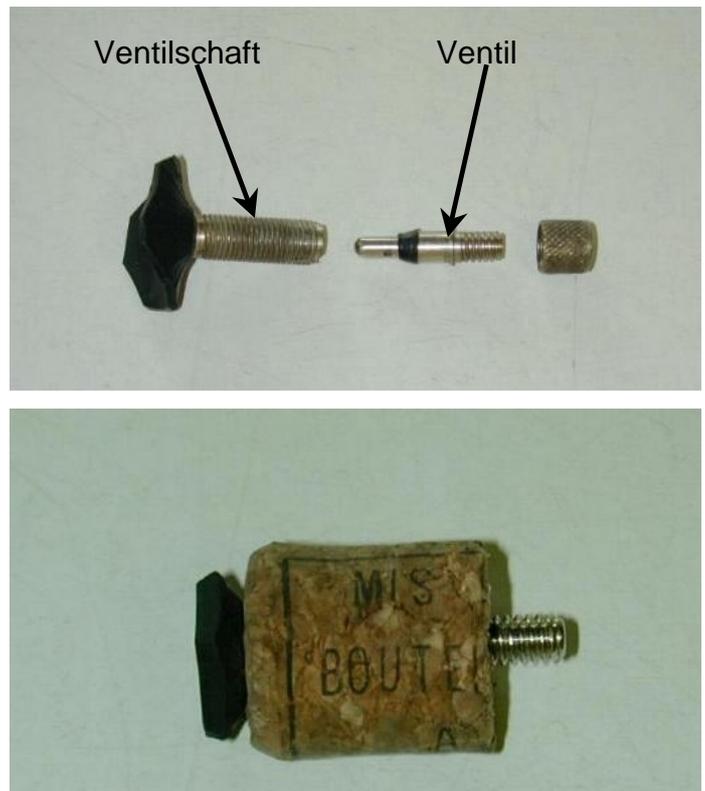
- 2.1. Die Raketengrundgleichung**
- 2.2. Bernoulli- Gleichung**
- 2.3. Die Rakete im Gravitationsfeld**
- 2.4. Optimale Füllmenge**
- 2.5. Bestimmung der Flughöhe einer einfachen Wasserrakete**

1. Einleitung

1.1. Bauanleitung einer einfachen Wasserrakete

Mit einer üblichen Coca-Cola Plastikflasche lassen sich einfache Wasserraketen konstruieren. Neben der Flasche, die als Flugkörper dient, benötigt man einen herkömmlichen Korken, einen alten Fahrradschlauch mit Ventilschaft und ein Fahrradventil.

Um aus diesen Materialien nun eine funktionstüchtige Rakete zu konstruieren wird als erstes aus dem Fahrradschlauch der Ventil ausgeschnitten. Dabei ist zu beachten, daß noch etwas Gummi am Ventilschaft bleibt (nicht mehr als der Durchmesser des Korken). Als nächstes wird längs durch den Korken ein Loch gebohrt. Die Bohrung muß so groß sein, daß der Ventilschaft gerade in den Korken eingeführt werden kann. Nun wird der Korken in der Länge gekürzt, so daß das Ventil einsetzbar ist.



1.2. Inbetriebnahme

Es bleibt jetzt nur noch, die Rakete zur einem Drittel mit Wasser zu füllen, sie mit dem Korken zu verschließen und einen geeigneten Start- und Landeplatz zu suchen. Ist die Flasche mit Wasser gefüllt und durch den Korken verschlossen läßt sich mit einer Fahrradpumpe durch Pumpen ein Überdruck in der Flasche erzeugen. Bei genügend hohem Überdruck löst sich der Korken. Das Wasser schießt heraus, wodurch die Rakete eine Kraft erfährt, die sie senkrecht nach oben treibt. Beim Brennvorgang verliert die Rakete ständig an Gewicht (Wasser) und wird dabei beschleunigt. In dem Moment, in dem die Rakete das gesamte Wasser verloren hat, hat sie ihre höchste Geschwindigkeit erreicht und wird nicht mehr beschleunigt. Durch die Gravitation und den Luftwiderstand wird die Rakete abgebremst und fällt nach dem Erreichen der maximalen Flughöhe wieder zur Erde zurück.

Im Gegensatz zu Brennstoffraketen wird hier jedoch keine chemisch gebundene Energie freigesetzt. Die Energie wird vielmehr vom Bodenpersonal als Luftdruck, durch das Pumpen mit der Luftpumpe, der Rakete zugeführt. Die in der Flasche gespeicherte Energie, wird dafür genutzt um Wasser mit hoher Geschwindigkeit ausströmen zu lassen. Da die Masse der Rakete (Colaflasche) sehr gering ist, genügt die Masse des ausströmenden Wassers um die Rakete anzutreiben.



Das Bild einer Wasserrakete kurz vor dem Start:

Es zeigt wie vom Bodenpersonal durch Pumpen der gewünschte Überdruck in der Flasche erzeugt wird.

2. Warum fliegt die Wasserrakete

Im folgenden soll kurz erläutert werden, warum die Wasserrakete fliegen kann, obwohl doch weder einen Motor noch ein Katapult oder eine Explosion sie wegschleudert. Da die Wasserrakete prinzipiell genauso wie eine Brennstoffrakete arbeitet, können die folgenden Überlegungen auch auf echte Raketen angewandt werden.

Die Antwort auf die Frage fand bereits Isaac Newton, obwohl er bestimmt nie eine Wasserrakete gesehen hatte. Doch ist der Raketenantrieb eine Anwendung des dritten Newtonschen Axioms und der Impulserhaltung.

Eine heute verwendete Formulierung der Newtonschen Axiome lautet:

Erstes Newtonsches Axiom (Trägheitsprinzip): Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine resultierende äußere Kraft auf ihn einwirkt (die resultierende Kraft ist die Vektorsumme aller Kräfte, die an einen Körper angreifen):

$$F = \sum_i F_i = 0$$

Zweites Newtonsches Axiom (Aktionsprinzip): Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse und direkt proportional zur resultierenden Kraft, die auf ihn wirkt:

$$F = a \cdot m$$

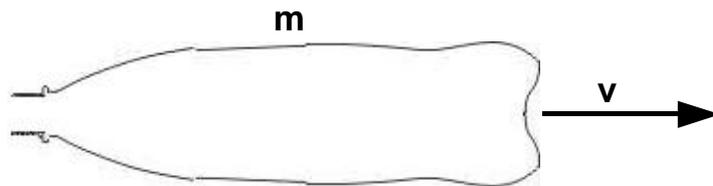
Drittes Newtonsches Axiom (Reaktionsprinzip): Kräfte treten immer paarweise auf. Wenn Körper A eine Kraft auf Körper B ausübt, so wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft von B auf Körper A.

Die Wasserrakete erzeugt ihren Schub, indem sie Wasser nach hinten ausstößt. Da der Gesamtimpuls konstant bleibt, muß der durch den Wasserausstoß verlorene Impuls gleich dem Impuls sein den die Rakete dazugewinnt. Dadurch wird die Geschwindigkeit der Rakete erhöht.

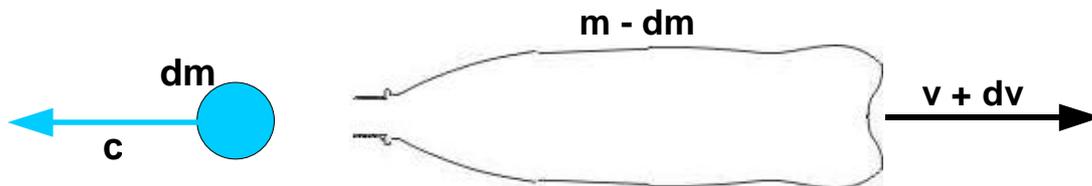
2.1. Die Raketengrundgleichung

Es soll hier eine Gleichung entwickelt werden, die die Bewegung der Wasserrakete beschreibt:

Zur Zeit t :



Zur Zeit $t + dt$:



Wir nehmen an, daß sich die Rakete mit der Masse $m_0 = m_F + m_W$ (Raketenkörper m_F und Wasser m_W) im kräftefreien Raum mit einer Geschwindigkeit v_0 bewegt. Sie stößt in der Zeit dt Wasser der Masse dm mit der Geschwindigkeit c aus. Also mit dem momentanen Impuls $c \cdot dm$ bzw. mit der Impulsänderung $\Delta p_1 = c \cdot dm$.

Dabei erfährt die Rakete, mit der neuen Masse m einen Geschwindigkeitszuwachs dv . Also die Impulsänderung $\Delta p_2 = m \cdot dv$.

Da der Gesamtimpuls konstant bleibt, muß die Rakete den entgegengesetzten gleichen Impuls aufnehmen.

Also:

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= -\Delta p_2 \\ \Rightarrow c \cdot dm &= -m \cdot dv \end{aligned}$$

Pro Zeitintervall dt erhält man somit:

$$c \frac{dm}{dt} = -m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$\frac{dm}{dt}$ ist die zeitliche Massenänderung und $\frac{dv}{dt}$ die zeitliche Geschwindigkeitsänderung,

also die Beschleunigung a . Nach dem zweiten Newtonschen Axiom ist $m \cdot a$ eine Kraft, nämlich die Schubkraft, die die Rakete erfährt:

$$\boxed{-c \frac{dm}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a} \quad \text{Schubkraft}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Die erhaltende Gleichung ist eine Differentialgleichung, die nur einen Änderungszustand beschreibt.

Um die Endgeschwindigkeit zu bestimmen muß die Differentialgleichung integriert werden.

Nehmen wir die Ausströmgeschwindigkeit c näherungsweise als konstant an, können wir einfach von $t = 0$ bis $t = t_v$ integrieren, der Zeitpunkt, an dem die Flasche völlig entleert ist:

$$\int_{m_0}^m \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{c} \cdot \int_{v_0}^v \frac{dv}{dt}$$
$$\Rightarrow \ln \frac{m}{m_0} = -\frac{1}{c} (v - v_0)$$

Daraus ergibt sich die „Raketengleichung“:

$$v = v_0 - c \cdot \ln \frac{m}{m_0}$$
$$\Rightarrow \boxed{v = v_0 + c \cdot \ln \frac{m_0}{m}} \quad \text{Raketengleichung}$$

Mit dieser Gleichung läßt sich die Endgeschwindigkeit im kräftefreien Raum berechnen: Ist m_0 die Startmasse und m_F die Masse der Rakete bei Brennschluß, dann erreicht die Wasserrakete insgesamt die **Endgeschwindigkeit**:

$$v_e = v_0 + c \cdot \ln \frac{m_0}{m_F}$$

2.2. Bernoulli- Gleichung

Im folgenden Abschnitt wird die Ausströmgeschwindigkeit c genauer betrachtet. Bei der Herleitung der Raketengleichung wurde c konstant gewählt, dies ist in Wirklichkeit allerdings nicht so. Der Druck fällt natürlich mit der Ausdehnung des Luftvolumen ab. Dies soll hier aber weiterhin vernachlässigt werden, was zulässig ist, wenn die Druckänderung klein ist im Verhältnis zum Überdruck in der Flasche, also somit das Wasservolumen klein ist im Verhältnis zum Gesamtvolumen.

Nach dem Bernoullische- bzw. Torricellische- Gesetz hat die Summe aus dem statischen Druck und dem Staudruck in gegebener Tiefe überall den gleichen Wert:

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = p_0 = \text{const}$$

Bernoulli- Gleichung

p_0 ist der Druck, der in einer ruhenden Flüssigkeit herrscht also der Luftdruck und es ergibt sich für die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers c :

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}$$

Hier ist ρ die Dichte des Wassers und Δp ($=p-p_0$) der Überdruck über dem Wasser. Somit erhalten wir für eine konstanten Druck p auch eine konstante Ausströmgeschwindigkeit des Wassers c .

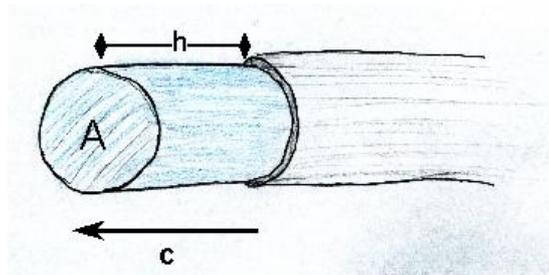
2.3. Die Rakete im Gravitationsfeld

Die vorigen Überlegungen lassen eines vollkommen außer acht, nämlich daß eine Wasserrakete im leeren Raum nicht funktionieren kann. Um dies zu erläutern muß man nur an das Trinkproblem der Astronauten in ihren Schiffen denken. Das Trinkproblem besteht darin, daß sich im Weltall Flüssigkeiten nicht am Boden eines Gefäß sammeln, dies ist nur möglich wenn die Anziehungskraft eines Himmelskörper die Flüssigkeit nach unten zieht. So würde sich auch bei der Wasserrakete das Wasser nicht mehr über der Flaschenöffnung sammeln, sondern es würde sich in

kleine Kugeln zerteilen, die durch den ihnen zur Verfügung stehenden Raum schweben.

Aber im Normalfall wird auch Niemand auf die Idee kommen die Wasserrakete im Weltall zu starten, sondern man wird sich vielmehr auf die Erde beschränken. Beim Start, einer Wasserrakete, an der Erdoberfläche wirkt das Gravitationsfeld auf diese ein. Hier kann die Gravitationsfeldstärke als konstant und gleich der Erdbeschleunigung g angenommen werden. So ist von der oben berechneten Endgeschwindigkeit die Fallgeschwindigkeit abzuziehen. Weiter ist im allgemeinen beim Start auf der Erdoberfläche $v_0 = 0$ zu setzen, und man erhält für die Endgeschwindigkeit:

$$v_e = c \cdot \ln \frac{m_0}{m_F} - g t_B \quad \text{mit } t_B = \frac{V_W}{A \cdot c}$$



V_W ist das in dem Zeitintervall t_B ausgeströmte Wasservolumen und A ist der Düsenquerschnitt.

Durch Umformen erhält man:

$$v_e = c \cdot \ln \frac{m_F + \rho \cdot V_W}{m_F} - g \frac{V_W}{A \cdot c}$$

$$\Rightarrow v_e \cdot \rho = c \cdot \rho \cdot \ln \frac{m_F + \rho \cdot V_W}{m_F} - g \frac{\rho \cdot V_W}{A \cdot c}$$

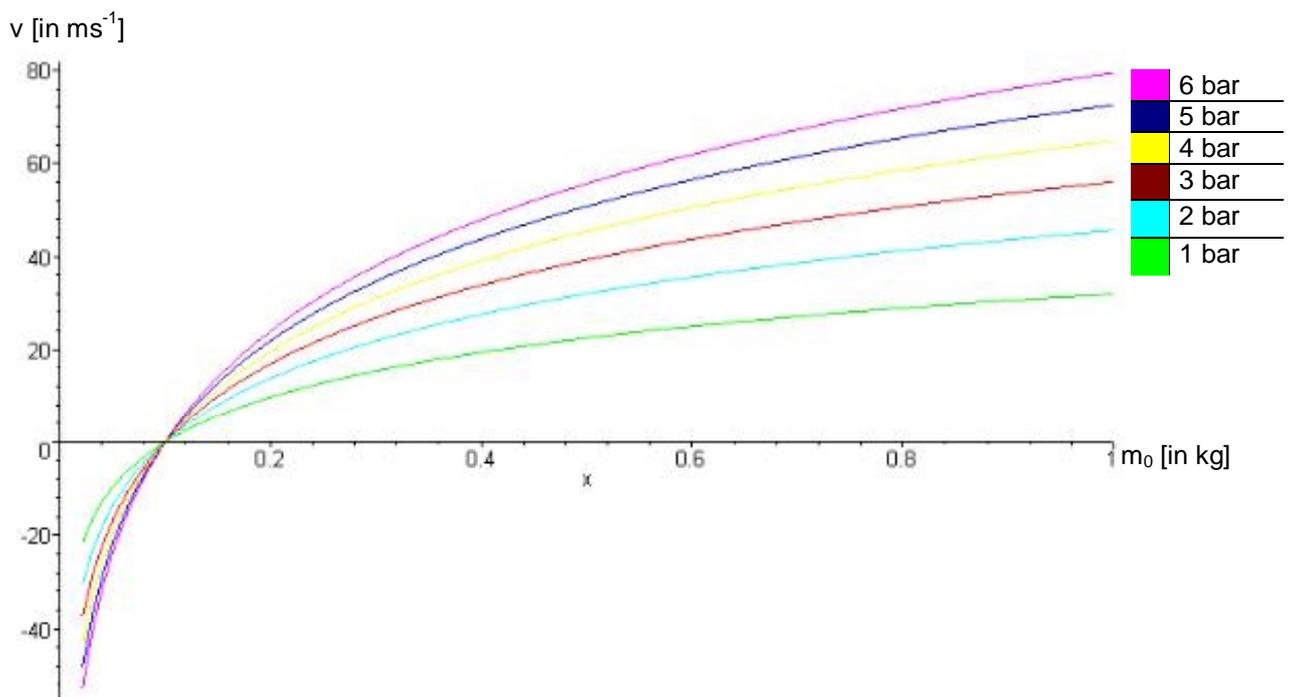
$$\Rightarrow v_e \cdot \rho = c \cdot \rho \cdot \ln \frac{m_F + m_W}{m_F} - g \frac{m_W}{A \cdot c}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_e = c \cdot \ln \frac{m_0}{m_F} - g \frac{m_0 - m_F}{\rho \cdot A \cdot c}}$$

2.4. Optimale Füllmenge

Der Geschwindigkeitszuwachs hängt von der Ausströmgeschwindigkeit c und vom Verhältnis Startgewicht m_0 zum Leergewicht m_F ab. Da schließt sich die Frage an, welches die optimale Füllmenge ist um eine maximale Geschwindigkeit und damit eine maximale Höhe zu erreichen. Da wir die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers c als konstant annehmen wollen, aber wir unterschiedliche konstante Überdrücke in der Flasche erzeugen können, die in der Praxis etwa bei 2 bar bis 4 bar liegen, erhalten wir, wenn wir v_e über m_0 auftragen eine Kurvenschar:

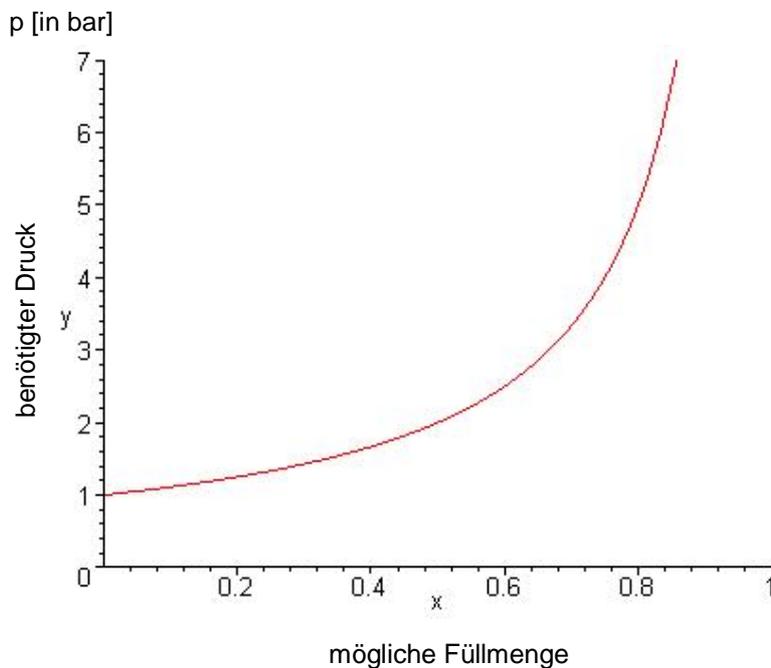
$$v_e(m_0, p) = c \cdot \ln \frac{m_0}{m_F} - g \frac{m_0 - m_F}{\rho \cdot A \cdot c} \quad \text{mit } p = 1, \dots, 6 \text{ bar}$$



Es zeigt sich, daß bei steigender Masse m_0 die Geschwindigkeit der Rakete v_e steigt.

Um aus den Graphen die optimale Füllmenge zu ermitteln muß berücksichtigt werden, daß bei einem Überdruck Δp nur eine bestimmte Wassermenge mit der Masse m aus der Rakete geschleudert werden kann, da sich die komprimierte Luft nur auf ein bestimmtes Volumen ausdehnt. So wird für eine 1l Flasche bei einer Füllmenge von 0,5l Wasser, ein Überdruck in der Flasche von mindestens 2 bar (bei einem Außendruck von 1 bar) benötigt, um das Wasser vollständig aus der Flasche zu drücken. Ist der Überdruck kleiner, bleibt noch Wasser nach Brennschluß in der Flasche. Dies vergrößern die Masse m_F , die hier aber als Masse der leeren Rakete angenommen wurde und somit konstant ist.

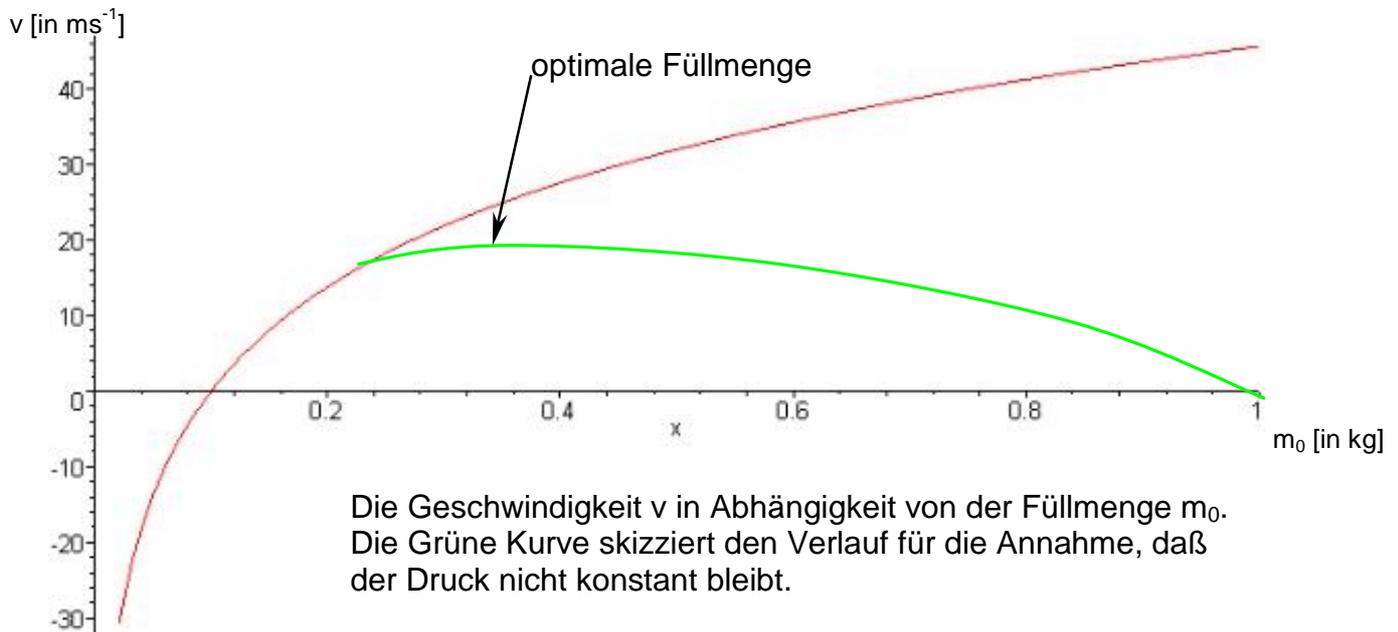
In dem folgenden Graphen ist der benötigten Druck, um die Flasche vollständig zu entleeren, über die Füllmenge aufgetragen:



Die Geschwindigkeit wird also nicht stetig steigen, sondern an dem Punkt abbrechen, an dem die Rakete kein Wasser mehr herausdrücken kann.

Weiter ist zu beachten, daß bei größeren Füllmengen die Bedingung für konstanten Druck nicht mehr erfüllt ist. Das hat zur Folge, daß der Kurvenverlauf nicht abrupt abbricht, sondern schon vorher abnehmen wird. So würde der Kurvenverlauf bei einem Druck von 2 bar in etwa der unten gezeigten grünen Kurve entsprechen.

Es ergibt sich also für einen Überdruck von 2 bar eine optimale Füllmenge von ungefähr 0,35 l.



2.5. Im folgenden wird grob die Flughöhe der oben beschriebenen Wasserrakete abgeschätzt.

Als Flugkörper dient hier eine 1,5 l Coca-Cola Plastikflasche. Die optimale Füllmenge liegt bei etwa 0,4 l Wasser. Wir nehmen an, daß sich bei einem Überdruck von

$$\Delta p = 2 \text{ bar} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

der Korken löst. Die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers c ergibt sich dann, aus der Bernoulli- bzw. Torricelliformel zu:

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{10^3 \text{ kgm}^{-3}}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Leermasse der Rakete m_F beträgt 0,08 kg und die Startmasse m_0 ist gleich 0,48 kg. Daraus ergibt sich mit der Raketengleichung eine Endgeschwindigkeit von:

$$v_e = c \cdot \ln \frac{m_0}{m_F} - g \frac{m_0 - m_F}{\rho \cdot A \cdot c}$$

$$\Rightarrow v_e = 20 \frac{m}{s} \cdot \ln \frac{0,48kg}{0,08kg} - 9,81 \frac{m}{s^2} \frac{0,40kg}{10^3 kgm^{-3} \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 20ms^{-1}}$$

$$\Rightarrow v_e = 35,835 \frac{m}{s} - 1,962 \frac{m}{s} = 33,873 \frac{m}{s}$$

Die Zeit t_B , in der das Wasser aus der Rakete ausgestoßen wird lässt sich berechnen durch:

$$t_B = \frac{V_w}{A \cdot c}$$

$$\Rightarrow t_B = \frac{400 \cdot 10^{-6} m^3}{10^{-4} m^2 \cdot 20ms^{-1}}$$

$$\Rightarrow t_B = 0,2s$$

Daraus folgt für den Weg, den die Rakete während der Beschleunigungsphase zurücklegt:

$$s = \frac{1}{2} \cdot v_e \cdot t_B$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot 33,873ms^{-1} \cdot 0,2s$$

$$\Rightarrow s = 3,3873m$$

Somit errechnet sich die Flughöhe h der Wasserrakete zu:

$$h = \frac{1}{2} \cdot v_e \cdot t_R + s \quad \text{mit} \quad t_R = \frac{v_e}{g}$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_e^2}{2 \cdot g} + s$$

$$\Rightarrow h = \frac{33,873^2 m^2 s^{-2}}{2 \cdot 9,81ms^{-2}} + 3,3872m$$

$$\Rightarrow h \approx 62m$$

In Wirklichkeit fliegt die Rakete nicht ganz so hoch, da zum Beispiel Größen wie der Luftwiderstand außer Acht gelassen wurden.

Literatur

- (1) Linckens, P.H.: Raketenphysik im Unterricht.- Aulis-Verlag Deubner, Köln 1974
- (2) Ucke, C.: Wasserrakete.- Physik in der Schule 31, 1993
- (3) Vogel, H.: Gerthsen Physik.- Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1997
- (4) Tipler, P. A.: Physik.- Spektrum Akademischer Verlag, Berlin Heidelberg 1998